Chinese remainder theorem

EG $x \equiv 32 \pmod{35}$ $\quad x = 32 + 35m$, $35 = 5 \cdot 7$

$\Longleftrightarrow$ $x \equiv 2 \pmod 5$ and $x \equiv 4 \pmod 7$

Chinese remainder theorem (because 5, 7 are coprime)

EG $x \equiv 2 \pmod 5$ $\quad x \equiv 4 \pmod 7$

Find such x!

$$x \equiv 2 \cdot 7 \cdot 7^{-1}_{\bmod 5} + 4 \cdot 5 \cdot 5^{-1}_{\bmod 7}$$

$7^{-1}_{\bmod 5} \equiv 2^{-1}_{\bmod 5} \equiv 3$; $\quad 5^{-1}_{\bmod 7} \equiv 3$

$\equiv 2 \pmod 5$, $\equiv 0 \pmod 7$; $\quad \equiv 0 \pmod 5$, $\equiv 4 \pmod 7$

$$\equiv 2 \cdot 7 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 42 + 60 = 102 \equiv 32 \pmod{35}$$

EG $x \equiv 1 \pmod 4$ $\quad x \equiv 2 \pmod 5$

$$x = 1 \cdot 5 \cdot 5^{-1}_{\bmod 4} + 2 \cdot 4 \cdot 4^{-1}_{\bmod 5}$$

$5^{-1}_{\bmod 4} \equiv 1$; $\quad 4^{-1}_{\bmod 5} \equiv (-1)^{-1} \equiv -1$

$$\equiv 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -3 \pmod{20}$$

$20 = 4 \cdot 5$

EG $x \equiv 1 \pmod 4$ $\quad x \equiv 2 \pmod 5$, $\quad x \equiv 3 \pmod 7$

Option 1: $\quad x \equiv -3 \pmod{20}$ $\quad x \equiv 3 \pmod 7$

proceed as before

Option 2:

$$x = 1 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (5 \cdot 7)^{-1}_{\bmod 4} + 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot (4 \cdot 7)^{-1}_{\bmod 5} + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 5)^{-1}_{\bmod 7}$$

$(5 \cdot 7)^{-1}_{\bmod 4} \equiv (3)^{-1}_{\bmod 4} \equiv -1$; $\quad (4 \cdot 7)^{-1}_{\bmod 5} \equiv (-2)^{-1}_{\bmod 5} \equiv 2$; $\quad (4 \cdot 5)^{-1}_{\bmod 7} \equiv (-1)^{-1}_{\bmod 7} \equiv -1$

$$\equiv -35 + 112 - 60 = 17 \pmod{140}$$

$140 = 4 \cdot 5 \cdot 7$